DOS CASOS DE FIGURACIÓN PARA LO QUE VARÍA

Eduardo Carrasco Henríquez, Leonora Díaz Moreno
Universidad de Los Lagos (Chile)
ecarrascr17@ulagos.cl, leonoradm@ulagos.cl
Reporte de investigación
Medio superior y Superior

Resumen
Este trabajo se planteó el propósito de indagar eslabones entre epistemes propias de estudiantes y aquellas epistemes que están a la base del saber matemático escolar que se pretende enseñar. En particular se aborda el estudio de los procesos de construcción de gráficas de fenómenos de variación, entendidas estas como recurso para modelar aquello que cambia y de cómo cambia. Sobre una base socioepistemológica, se reportan interpretaciones a figuras que buscan presentar las entidades que varían en un fenómeno. Se estructura el análisis desde la noción de práctica de figuración. Se recurre a nociones teóricas provenientes de la teoría de la imagen y de los análisis semánticos de Barthes (1964) para analizar a la figura como una narración de lo que ocurre en el fenómeno. Se concluye sugiriendo eslabones entre figuraciones estudiantiles y una figuración de Newton, que está a la base de la gráfica cartesiana escolar.

1. INTRODUCCIÓN

Diversas ideas matemáticas han cobrado una especificidad que las aleja conceptualmente de nociones cotidianas, mientras siguen compartiendo su nombre. Por ejemplo, el tiempo es significado como una distancia en la actividad matemática mientras que en la cotidianidad es entendido como si fuera oro que se comercia y se acaba, entre otras muchas acepciones (Carrasco, 2006; Díaz, 2008). El infinito difiere en sus nociones cotidianas de las trabajadas en el cálculo diferencial (Leston, 2008). Una de las acepciones cotidianas de límite es la de un récord que lograr, el que, en general, solo personas excepcionales conquistan y hasta superan (Díaz, 2006). Los estudiantes, que se conciben normales, los consideran lejanos a su cotidianidad -*esos [los record] no son para gente como uno,* afirma un estudiante- por lo que no se plantean su conquista o superación. Otra acepción de límite en la vida diaria lo vincula a la norma. Quienes van más allá de ella, sufren el castigo social. Díaz (op. cit., 2006) plantea a esta acepción como un obstáculo sociocultural a los aprendizajes del límite matemático. Lo anterior ilustra la necesidad de configurar eslabones entre epistemes que sustentan los estudiantes y la episteme de la matemática que se enseña.

En particular, este reporte aborda el desafío de constituir a las gráficas escolares cartesianas de covariación de variables, como un recurso de modelación matemática para fenómenos de variación. Construir e interpretar gráficas escolares cartesianas, presentan dificultades que aún persisten en la actividad de los estudiantes. Janvier (1987), Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990), Roth y Bowen (2003), Dolores (2004), Arrieta (2003), Díaz (2005, 2006), Carrasco (2006), Buendía y Carrasco (2009), Cordero y Cen (2010), muestran diversos obstáculos, destacando que los estudiantes: confunden a la gráfica distancia-tiempo con la traza del movimiento; interpretan el punto máximo de la curva como el momento de mayor velocidad del móvil; interpretan a puntos de la curva, que ostentan ordenadas negativas, como aquellos puntos en que el móvil se devuelve, entre otros.

Investigaciones reportadas en Díaz (2006), Carrasco (2006) y Carrasco y Díaz (2009) evidencian el uso de figuras, entendidas estas como disposiciones y formaciones de líneas que representan -

en dos dimensiones- entidades ostensibles y no ostensibles, para representar y comunicar variaciones en fenómenos. Estudiantes y profesores recurren a cómics, antes que a las gráficas cartesianas para representar lo que varía en el fenómeno. Los cómics son figuras altamente icónicas y de bajo simbolismo, como si fueran fotografías que van mostrando un espacio y cambios en el tiempo y en ese espacio (ver imagen 1b), a diferencia de una gráfica cartesiana que ha dejado oculto, en su alto simbolismo, el movimiento y el espacio. Esta gráfica cartesiana, de baja iconicidad, representa a todo fenómeno a través de un conjunto de puntos/pares ordenados (ver imagen 1a) sin incorporar la experiencia de movimiento de una manera directa (Radford, Demers, Guzmán y Cerulli, 2004).

En el marco de la socioepistemología, que asume la construcción social del conocimiento con base en la noción de práctica social, esta indagación estudia la actividad de figurar lo que cambia, esto es, construir una figura de una entidad afecta a variación. Se busca reportar prácticas socioescolares de figuración, las cuales se entienden como modos de operar -o esquemas de acción- compartidos por los actores escolares, para la construcción y la interpretación de figuraciones de entidades (asociadas a un fenómeno) que varían y contrastarlas con prácticas de figuración que están a la base de la gráfica cartesiana, estableciendo posibles eslabones que coadyuven a la construcción de pensamiento variacional estudiantil.

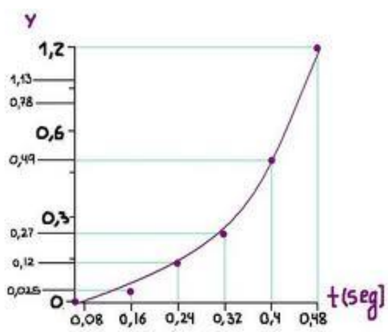

Imagen 1a

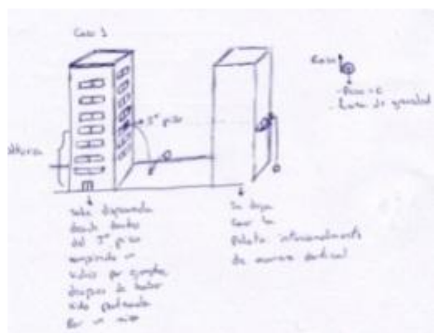

Imagen 1b

2. ELEMENTOS TEÓRICO-CONCEPTUALES

Para indagar en las epistemes que subyacen a las figuraciones en la actividad matemática, se considera una figuración de Newton y figuraciones de estudiantes y se las relaciona con prácticas socialmente compartidas. La práctica de figuración se la entiende con base en tres elementos que concurren a la actividad de los sujetos: **herramientas**, que en un sentido amplio de la palabra son entendidas como entidades que concurren con intencionalidad de uso, a su actividad matemática; **significados** que se enactan (entran en escena al figurar) tanto en la construcción como en la interpretación de la figura; tales significados son abordables desde los símbolos y su devenir en signo (entendido el signo como interpretación del símbolo); y, **argumentaciones** de los estudiantes (expresiones narrativas o icónicas) que articulan a las herramientas y los significados, en explicaciones y justificaciones para su actividad, sea esta construir o interpretar figuraciones.

En esta aproximación a la figuración de fenómenos de variación, se asume a la figura como modelo de un fenómeno. Modelo compuesto por símbolos, que se materializan en aquellas partes de la figura que devienen signos (al ser interpretados por medio de actos metafóricos), los cuales van configurando una narración del fenómeno en el sentido de Barthes (1964). Narración, que describe la covariación de las entidades que interesan. La figuración y su interpretación se producen junto con el uso de la figura construida, constituyendo prácticas de figuración que tributan a aspectos culturales y del contexto en donde se usa la figuración, en este reporte en su uso por estudiantes y en su uso por Newton. De este modo, la figuración de un fenómeno encuentra en su doble naturaleza, de figura y de modelo, una articulación, entre el dibujo y el fenómeno, de parte de quien la construye o la interpreta.

La figura, desde la teoría de la imagen y la esquemática, puede tener una función r*epresentativa* cuando sustituye a la realidad de forma analógica; s*imbólica*, cuando se adscribe a un concepto; y, c*onvencional* cuando sustituye a la realidad sin reflejar sus características (Villafañe y Mínguez, 2002). La imagen contiene un repertorio de elementos y estructuras de representación y responde a una sintaxis visual. Su comprensión involucra tres etapas: (a) la selección, exploración volitiva y proyectiva, en el campo visual de sus elementos; (b) la percepción de los elementos significativos a la cognición; y, por último, (c) la integración del mensaje visual. Por tanto, una misma imagen puede evocar diversas comprensiones sobre la información del mundo que figura (Villafañe y Mínguez, 2002).

En un primer nivel de análisis, se recurre a las nociones de grado de iconicidad, estructura y sintaxis y a distinciones de percepción que provee la Gestal -leyes de percepción- articuladas desde la teoría de la imagen, así como a las textualidades asociadas a su construcción. En un segundo nivel de análisis se recurre a la retórica de la imagen de Barthes (1964) para quien la imagen porta una polisemia de significados, de los cuales el observador puede elegir unos y descartar otros. El autor propone un análisis semántico pues entiende a la imagen como una narración. Distingue en ella un *mensaje lingüístico,* cuyo soporte son textos, letras que ayudan a denotar su contenido; un *mensaje denotado*, con un significado común a los hablantes; y, el *mensaje connotado,* que asocia un significado particular a un elemento de la figura. Para este autor, variarán las lecturas de los signos presentes en la imagen al provenir de un código cultural.

La retórica de la imagen se conforma en el mensaje connotado. Esta retórica es específica, en la medida en que está sometida a las exigencias físicas de la visión y, es general y abierta, en la medida en que las “figuras” emergen con base en relaciones formales entre sus elementos. Retórica que conforma la argumentación que subyace a la figuración. Sustanciales al análisis son los símbolos que devendrán en signos: ellos nos permitirán identificar metáforas que evidencian significados presentes en quien construye o interpreta la imagen.

3. MÉTODO

Es un estudio interpretativo que busca comprender dos prácticas de figuración: de estudiantes y una figuración de Newton. Es analítico en cuanto se buscan factores imbricados en esas prácticas de figuración. Es relacional en cuanto se propone distinguir eslabones y disonancias respecto de los elementos que se configuren.

Se abordó el análisis de la figuración de Newton desde una crónica histórica respecto del contexto social del autor, de su biografía y de su aporte a la obra matemática, construyendo un relato histórico que es contextualista en cuanto busca posicionar a la obra en su contexto histórico (White, 1992). Enseguida se levanta una mirada epistémica a su figuración. Mirada que se basa en una sensibilidad teórica que considera la teoría general de la imagen (Villafañe y Minguez, 2000), la esquemática (Costa, 2003) y la retórica de la imagen (Barthes, 1964) así como a las metáforas en calidad de analizadores de elaboraciones individuales y/o sociales (Lakoff y Núñez, 2000; Lizcano, 1993). Sensibilidad que se orienta desde las preguntas basales ¿Qué muestra la obra? ¿Qué elementos posee? ¿Qué sintaxis la constituye?. Posteriormente se realiza un análisis semántico (Barthes, 1964) para identificar los signos de la figura y, finalmente, construir la descripción epistémica, distinguiendo herramientas, argumentos y significados que concurren a la figuración del autor.

Se abordó el análisis de la figuración estudiantil aplicando un cuestionario, con reactivos que solicitaron la construcción de una figuración, a 18 estudiantes de profesorado en tercer año de su formación pedagógica que ya han aprobado cursos de cálculo. Del conjunto de figuraciones y textualidades así acopiadas, en este reporte se aborda el análisis de respuestas al primer reactivo. Para este análisis se utilizó un proceso de codificación abierta de la información (Krause, 1995; Strauss & Corbin, 1990; citados en Boetto y Aracena, 2005). Esta codificación permitió seleccionar grupos de figuraciones similares. Luego se realizó el análisis de cada una de las figuraciones desde la sensibilidad teórica sustentada en la teoría general de la imagen (Villafañe y Minguez, 2000), la esquemática (Costa, 2003) y la retórica de la imagen (Barthes, 1964) así como de las metáforas individuales y/o sociales (Lakoff y Núñez, 2000; Lizcano, 2006).

Con base en los resultados de ambos análisis de figuraciones, se establecen relaciones entre las prácticas de los estudiantes y la práctica de Newton, en orden a distinguir eslabones analíticos entre las figuraciones.

4. Figuración estudiantil del fenómeno de caída libre

Ante la consigna "*Representa la caída de una pelota desde un tercer piso*", los estudiantes levantan figuraciones como las que se muestran en la imagen dos.

<u>Primer nivel de análisis</u>. La porción de realidad que figuran los estudiantes es la trayectoria de la pelota. Todas las figuraciones presentan un edificio y el suelo, a modo de escenario, para la trayectoria. El repertorio de elementos lo constituyen flechas, líneas continuas y punteadas, que marcan dirección, la pelota –circulo- dibujada con línea gruesa para el primer momento y con línea punteada o tenue durante su caída, y, textualidades para denotar y aportar información. La sintaxis es la propia del cómic: presentan diversas escenas en una, con las distintas posiciones de la caída. El trazo de la pelota que inicia el movimiento es grueso, con respecto del que usan en sus otras posiciones. Ubican a esta primera figura, en el instante de referencia, al construir la figuración. El resto con trazos más tenues para indicar sus futuras posiciones, así como connotar que forman parte de instantes posteriores al instante de referencia. Se da cuenta del movimiento marcando una línea a modo de traza de la trayectoria, corporizando el movimiento con el seguimiento ocular, una de las maneras biológica de seguir con la mirada aquello que se mueve (Costa, 2003). Se sigue la secuencia figurada de posiciones de la pelota. Recurren a símbolos matemáticos y/o físicos para factores no ostensivos como gravedad y tiempo. Las textualidades connotan o dan información adicional a lo figurado: *"Se deja caer la pelota intencionalmente de manera vertical" [E5].* El nivel de iconicidad de las figuraciones, es alto, y aún es posible identificar las relaciones espaciales del fenómeno, no obstante que ellas estén alteradas. Amplían, con signos adicionales las potencialidades de la imagen -para dar cuenta del movimiento de la pelota- desplazándola a una función simbólica desde su función representativa.

Segundo nivel de análisis. El edificio y el suelo dan encuadre y espacialidad a la zona en que se figura la trayectoria de la pelota que cae. Se constituyen en fondo y marco de la figura, que permite focalizar la mirada en la trayectoria de la pelota y define un arriba y un abajo en la hoja. Se numerizan los pisos del edificio a manera de un eje vertical. Se connota a la altura de la pelota con una letra, con una llave.

En las escenas se figura el movimiento, invitando al ojo a recorrer una trayectoria en la imagen. Se recurre a la línea para expresar la ruta de la pelota. Línea que para Kandinsky (1952) "*Es la traza que deja el punto al moverse y es por lo tanto su producto. Surge del movimiento al destruirse el reposo total del punto. Hemos dado un salto de lo estático a lo dinámico*". Al igual que para Newton, quien concibió a las "líneas [engendradas] por el movimiento de puntos" (Babini, 1972, p.69).

Las diversas posiciones de la pelota figuran hitos en su movimiento. En la figura E5, marcan inicio y fin de la trayectoria. En la figura E4 de la imagen 2, las posiciones de la pelota se constituyen en signo de la velocidad creciente en la caída, al ser, estas denotadas variaciones de tiempo iguales al escribir t=0, t=1 y t=2; y, denotando las variaciones de desplazamiento crecientes, a través de posiciones relativas respecto del edificio (eje vertical).

Los variables roce y gravedad, que los estudiantes E4, E5 connotan con textos y símbolos no generan unidad con el resto de la figura, quedando a la percepción como elementos ajenos a la representación de la caída, aunque significan a elementos presentes en el fenómeno.

En síntesis, al enfrentar la tarea de figurar el fenómeno de movimiento propuesto a partir de la evocación del mismo (experimento pensado), se estructuran dos elementos que dan sentido a la comunicación: el escenario y/o marco en el que se desarrolla el movimiento, y, la trayectoria de este. Se visualiza una práctica de representación figurativa del fenómeno, con una función de la imagen que se desplaza de lo representacional, al incluir signos convencionales en las prácticas físicas escolares. Práctica inicial, en el proceso de figuración de un fenómeno. Práctica de figuración que se caracteriza a continuación.

Tabla 1 Práctica de Figuración estudiantil de la caída libre

Herramientas	Un escenario, con dos dimensiones espaciales (alto y ancho) Flechas y líneas Grosor de la línea para diferentes posiciones en la figura representada Letras y vectores para connotar aspectos y para relevar en el proceso de comunicación Lectura de izquierda a derecha.
Argumentaciones Visuales	Sintaxis analógica a la realidad. Se estructura la figuración haciendo ostensible la trayectoria del objeto, poniendo su inicio en el acto de soltar la pelota y culminando con el objeto en el suelo.
Significados	Edificio y suelo fungen como marco para la acción La línea es la traza de la trayectoria del móvil. La flecha como dirección del movimiento y como vector que denota fuerza de gravedad, roce o tiempo.

La mirada a las prácticas de figuración estudiantiles, a las que concurren aspectos socioculturales, cognitivos y matemáticos, arrojó como elemento destacado a la línea. En sus prácticas de figuración los estudiantes construyen una escena en la que significan el movimiento definiendo un inicio, una traza y un final para recorrer con la mirada. La línea traza la ruta que ha de seguir el móvil, junto a puntos centrales cuando existen (las diversas posiciones de la pelota; el punto dado en el enunciado,...). Asimismo, invita al ojo a recorrerla y con ello comunica el sentido del desplazamiento por el marco para la acción conformado por el edificio y el suelo. Las variables no ostensibles en el fenómeno, velocidad, gravedad, roce, tiempo, son connotadas por medio de símbolos y textos aledaños a la figura principal.

5. LA FIGURACIÓN DE LO QUE VARÍA EN NEWTON

Concibe a la línea como la traza del movimiento de un punto. Punto que es determinado a partir de dos segmentos perpendiculares coordenados (AB y BD en la figura), los cuales tendrán una longitud proporcional al valor de la medida de la magnitud de los fluyentes (por ejemplo la velocidad o el tiempo) en cada instante del fenómeno que modela la figura que construye Newton. Su construcción es una aplicación explicita de la metáfora que introdujera Oresme en el siglo XIV, para figurar cualidades de lo que varía, como por ejemplo la intensidad de la velocidad. Su figura geométrica le permite recurrir a la proporcionalidad de la geometría euclidiana, para establecer relaciones entre variables. Con base en su noción de línea, la metáfora de Oresme y su recurso a la noción de evanescentes, considera trazos a distancias infinitesimales, que mantienen sus relaciones geométricas.

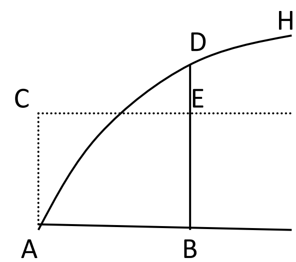

Imagen 4

En la imagen 3, se representa la relación entre cantidades fluyentes x(t) e y(t) que covarían, figurando a *x* por el segmento AB y figurando a *y* por el segmento BD, segmentos cuyas longitudes son proporcionales a las cantidades de magnitud de los fluyentes. El cambio de los fluyentes *x* e *y* se expresa en el cambio de las longitudes de los segmentos AB y BD, produciendo la curva ADH como la traza del punto D. Por tanto la figura se transforma en un relato geométrico de la forma de covariar de los fluyentes. Con base en la figura geométrica, Newton busca la expresión algebraica con que establece la relación entre los segmentos coordenados, lo que interpreta como una expresión que relaciona las variables fluyentes. En su trabajo recurre a herramientas de la geometría euclidiana: el rectángulo ABEC de lado unitario AC, la longitud de AB, el área bajo la curva ADH, la longitud de BD, entre otras.

Los elementos que componen la figura son: la línea como traza del punto D, los segmentos coordenados que son parte integral de la figura y el rectángulo como elemento geométrico secundario. La sintaxis de la imagen se articula desde los segmentos AB y BD, que trazan la curva. La imagen así construida, es a la vez, simbólica y de baja iconicidad, es decir, sin relación analógica al fenómeno.

En el segundo nivel de análisis, la línea ADH, engendrada por el movimiento del punto D, es significada como la traza de ese movimiento y por tanto es una corporización de la relación de covariación de las cantidades que fluyen (Babini, 1972, p.69) a la vez que la relación entre los fluyentes es figurada desde su variación. Otro elemento son los segmentos AB y BD, coordenadas geométricas de la curva ADH y que relacionan figura y fenómeno sobre la base de la metáfora de Oresme, "la magnitud de la cualidad es proporcional a la longitud de un segmento".

Así Newton estructura su figuración desde la metáfora "*La curva es la traza de un punto que se mueve*". Conjuga análisis geométricos y dinámicos, para encontrar la ecuación entre las cantidades de magnitudes que varían o entre sus velocidades de variación. Con recurso a la aritmética algebraica, incorpora lo analítico al estudio de las curvas. A continuación se caracteriza la figuración de Newton.

Tabla 2 Práctica de Figuración del movimiento de Newton

Herramientas	Figuras geométricas euclidianas (puntos, segmentos y figuras geométricas); Proporcionalidad; Aritmética algebraica.
Argumentaciones Visuales	La curva como la traza de un punto que se mueve con base en el desplazamiento de segmentos perpendiculares (metáfora base). El argumento visual construye la curva con dos segmentos/coordenadas. Asocia áreas, longitudes y sus variaciones, de modo proporcional, a los valores y variaciones de las cantidades del fenómeno en estudio.
Significados	Las variaciones de áreas como variaciones de cantidades involucradas en el fenómeno; La línea como traza del movimiento; La magnitud de una entidad que varía es un segmento de longitud proporcional a su cuantificación.

La práctica de figuración de Newton significa a la línea, al igual que los estudiantes, como la traza de un movimiento. En su caso, de un punto en el plano euclideo, que representa la co-variación en el tiempo de dos fluyentes, a partir de la metáfora de Oresme. En el caso de la figuración estudiantil, la línea traza el movimiento de un móvil. Para Newton cada punto de la curva, tiene asociados dos segmentos coordenados, cuyas longitudes serán proporcionales a la medida de la magnitud de los fluyentes en ese instante. Para los estudiantes cada punto de la curva es una posición en un escenario. Conviene incorporar la metáfora de Oresme, explicita en el trabajo de Newton y ausente en un aula que trabaja la gráfica como un conjunto de puntos (Carrasco, 2006) con miras a la apropiación de la gráfica como modelo para fenómenos de variación que no necesariamente responden a situaciones de desplazamiento. Asimismo conviene reparar en las herramientas, significados y argumentos de las prácticas de figuración estudiantiles al momento de figurar en el aula fenómenos de variación.

6. A MODO DE CONCLUSIÓN

La mirada a las prácticas de figuración, a las que concurren aspectos socioculturales, cognitivos y matemáticos, permitió comprender actividades de figuración de lo que varía, articulando las nociones de argumentos, herramientas y significados según se las use.

Un eslabón que acerca dos prácticas de figuración, es la línea significada como traza de un movimiento. En las prácticas de figuración de los estudiantes es el movimiento del móvil en un registro fenoménico, mientras que en la práctica de figuración de Newton es el movimiento de un punto euclidiano, que metaforiza covariaciones de fluyentes no necesariamente asociados a desplazamiento, construyendo expresiones algebraicas que relacionan a las variables que estudia.

Los estudiantes inician construyendo una escena para significar el movimiento. Mediante la línea definen un inicio, un camino y un final que recorrer con la mirada, junto a puntos centrales cuando existen (las diversas posiciones de la pelota; el punto dado en el enunciado,...). Invita al ojo a recorrer la línea y con ello comunica el sentido del desplazamiento en el escenario que se presenta a la mirada.

Para Newton, la línea es la traza del movimiento de un punto en el plano euclideo, que traza la co-variación en el tiempo de dos fluyentes, a partir de la construcción metafórica de Oresme. Así cada punto de la curva, tiene asociados dos segmentos coordenados, cuyas longitudes serán proporcionales a la medida de la magnitud de los fluyentes en ese instante. Esta metáfora, explícita en el trabajo de Newton, está ausente en la escuela, la que trabaja la gráfica como un conjunto de puntos.

Las coordenadas presentan profundas diferencias en cuanto a su uso y significación en la práctica de figuración de los estudiantes y en la práctica de Newton. Los estudiantes, en cada figuración, construyen un marco donde ocurre el movimiento, puede ser a partir del edificio y el suelo o de ejes explícitos perpendiculares. Los significados asociados a estos elementos de marco corresponden a dimensiones espaciales (largo/alto) de la hoja en que se figura y por ende a magnitud de longitud. Los ejes constituyen un fondo de la figuración (en el sentido de la Gestalt) que no participa de los análisis de la figura. Se trata de claves para determinar base y altura en la hoja (de papel o virtual) que soporta la figuración. Luego, los mayores valores de la variable, serán los puntos "más altos" de la hoja y no requieren el eje para determinarse. En cambio en la práctica de figuración de Newton las coordenadas son segmentos que componen la figura, por tanto siempre son parte de ella y están presentes en su visualización, participando de las relaciones geométricas que se construyen para entender lo que varía y como varía. Esto sobre la base de la Metáfora de Oresme, que en la escuela se constituye en una metáfora muerta, al decir de Lizcano, toda vez que los ejes cartesianos invisibilizan las medidas de los segmentos, las que son reemplazadas por coordenadas numéricas.

Los resultados del análisis realizado, invitan a proyectar la articulación de diversas prácticas de figuración, haciendo concurrir figuraciones icónicas y su interpretación y figuraciones cartesianas escolares, que elicitan metáforas de base desde los casos presentados.

7. REFERENCIAS

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis Doctoral no publicada, Cinvestav, IPN. México.

Barthes, R. (1964). *Ensayo: Retórica de la imagen.* Paidós Comunicación.

Banini, J. (1972). *El cálculo infinitesimal. Origen y Polémica.* Ed. Universitaria. Buenos Aires.

Boetto, C., y Aracena, M. (2005). Estudio Exploratorio sobre la visión de salud de un grupo de adolescentes hombres desertores del sistema escolar de la comuna de Santiago. *Psyke, 14* (2), 63-79. Chile.

Buendía, G., & Carrasco, E. (2009,). Gráficas de Variación: Reflexiones sobre la visualización de la curva. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, V. 21, 35-41. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Carrasco, E. (2006). *Visualizando lo que Varía. Interpretación y Construcción de Graficas de Variación en el Tiempo.* Tesis de Maestría no Publicada, CICATA. México

Carrasco, E., y Díaz, L. (2009). Metáforas, herramientas para interpretar argumentos variacionales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 1305-1314. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Cordero, F., & Cen, C. (2010). El rol de la funcionalidad de las gráficas en un contexto social de estudiantes y docentes del Bachillerato. *RELIME*. México, D.F.

Costa, J. (2003). *Esquemática.* Ed. Paidos. Barcelona, España.

Díaz, L. (2006) Representaciones cotidianas de límite, obstáculo sociocultural al aprendizaje del concepto matemático. Revista de la Facultad de Filosofía y Educación. UMCE. Chile.

Díaz, L. (2005). Profundizando en los entendimientos estudiantiles de Variación. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, V 8, N°2, pp. 145-168. CLAME. México.

Díaz, L. (2008). Matrices de sentido para las nociones de velocidad y tiempo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, V. 22, pp. 223-229. México.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *RELIME, 7* (3), 195-218. México D.F.

Janvier, C. (1987). *Problems of representations in the teaching and learning.* Lawrence Erlbaum. Hillsdale, New Jersey / London.

Kandinsky, N. (1993). *Punto y Línea sobre el Plano. Contribuciones al análisis de los elementos pictóricos.* Labor S.A.

Lakoff, G., y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* Ed. Basic Books. New York.

Leston P. (2008) *Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares*. Tesis de Maestría no Publicada, CICATA. México

Leinhardt, Zaslavsky, y Stein. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research , 60* (1), 1-64. Lawrence Erlbaum. Hillsdale, New Jersey / London.

Lizcano, E. (2006). *Metáforas que nos Piensan.* Ed. Bajo Cero y Traficantes de Sueños. España.

Radford, L., Demers, S., Gúzman, J., & Cerulli, M. (2004). The sensual and the conceptual: Artefact-medated kinesthetic actions and semiotic activity. *Proceedings of the 28 conference of the interntional group for the psycology of mathematics education (PME 28), 4*, pp. 73-80.

Roth, W.-M., & Bowen, G. (2003). When Are Graphs Worth Ten Thousand Words? An Expert-Expert Study. *Cognition and Instruction*, 429-473.

Villafañe, J., y Mínguez, N. (2002). *Principios de Teoría General de la Imagen.* Piramide. Madrid.

White, H. (1992). *Metahistoria. La imaginación historica en el siglo XIX.* FCE. México